

TPN02 : Résonance série et parallèle

But du TP

L'objectif de cette manipulation est l'étude théorique et pratique d'un circuit analogique RLC monté en série et en parallèle (filtre du second ordre).

L'étude du circuit RLC série portera sur les lois de variation avec la fréquence ;

- De l'amplitude et de la phase du courant traversant le circuit ;
- De l'impédance présentée par le circuit ;
- De l'amplitude des tensions aux bornes de chacun des éléments constituant le circuit (résistance R, bobine L et condensateur C).

1. Rappels théoriques

Quelques définitions

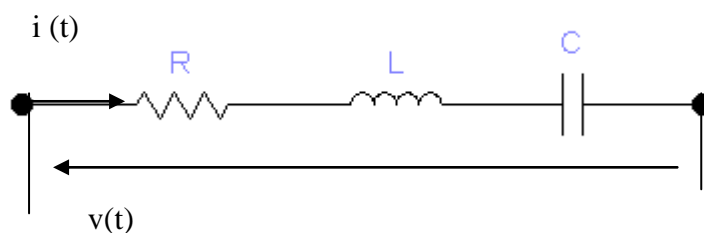
Un circuit RLC en électrocinétique est un circuit linéaire contenant une résistance électrique, une bobine (inductance) et un condensateur (capacité).

A l'aide d'un générateur de signaux, on peut injecter dans le circuit des oscillations et observer dans certains cas une résonance, caractérisée par une augmentation du courant (lorsque le signal d'entrée choisi correspond à la pulsation propre du circuit, calculable à partir de l'équation différentielle qui le régit).

1.1 Circuit RLC série

Le circuit est ici créé d'une résistance pure, un condensateur pur et d'une bobine pure, placés en série.

L'équation des tensions peut s'écrire : $U = U_R + U_L + U_C$



Nous utiliserons la notation complexe et nous prendrons le courant $i(t) = I_M * \cos(\omega t)$ pour origine des phases.

Le courant I traversant le circuit alimenté par la f.e.m (Force ElectroMotrice) Vest : $I = v / Z$

On donne l'équation du courant:

$$i(t) = I_M * \cos(\omega t) = \text{Re} \ell [I_M * e^{j\omega t}] = \text{Re} \ell [\bar{I} * e^{j\omega t}]$$

On donne l'expression de la tension:

$$v(t) = R * i(t) + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i(\tau) d\tau$$

$$\text{Re} \left[\bar{V} * e^{j\omega t} \right] = \text{Re} \left[\left[R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] * \bar{I} * e^{j\omega t} \right]$$

$$\Rightarrow \bar{V} = \left[R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] * \bar{I}$$

La représentation vectorielle nous donne :

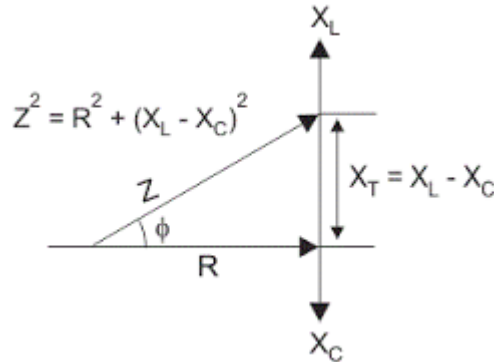


Figure 1. Diagramme de Fresnel

L'impédance du circuit s'écrit:

$$\Rightarrow \bar{Z} = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) = R + jX$$

L'impédance du circuit s'écrit donc (module et argument):

$$|\bar{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2} \quad \text{et} \quad \text{tg} \theta = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

Variation de l'impédance avec la fréquence

Le terme $R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2$ est une somme de deux carrés, donc de deux quantités

positives. Seule la partie $\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2$ varie avec la fréquence.

La représentation vectorielle nous donne :

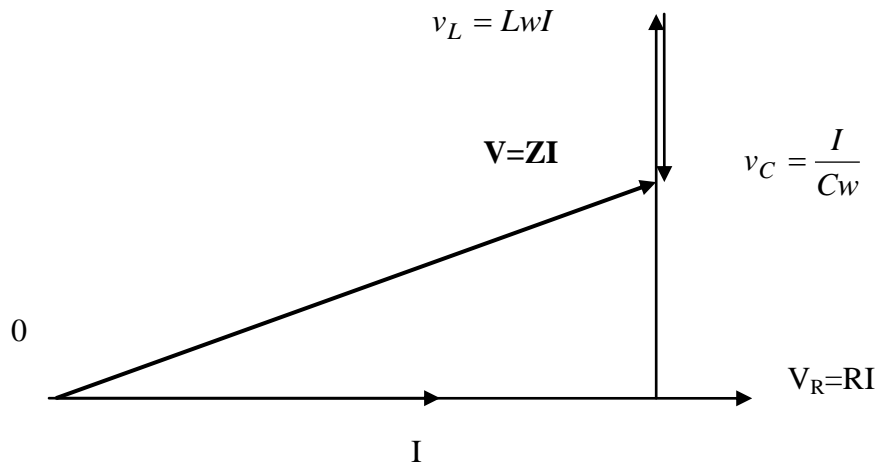


Figure 2. Représentation vectorielle des tensions d'un circuit RLC série

1. Fréquence propre du circuit

Le terme de l'impédance peut être nul : cela correspond au cas où les effets capacitif et inductif se compensent et s'annulent, donc à la fréquence propre f_0 du circuit RLC . En effet ,

on a alors
$$L \times \omega_0 - \frac{1}{C \times \omega_0} = 0 \quad \text{soit} \quad L \times \omega_0 = \frac{1}{C \times \omega_0}$$

On en déduit
$$\omega_0^2 = \frac{1}{L \times C} \quad \text{soit} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \times C}} \quad \text{ou encore} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi \times \sqrt{L \times C}}$$

- Quand $f = f_0$, l'impédance du circuit est minimale et est égale à R
- Quand $f = f_0$, le déphasage tension/courant est nul (effet résistif seul)

A la fréquence propre f_0 du circuit, son impédance est minimale et vaut R.

La figure suivante montre la variation des impédances Z_L , Z_C et R en fonction de la pulsation ω . Il est clair qu'il existe une valeur de la pulsation pour laquelle $Z_L = Z_C$, dans ce cas l'impédance globale se réduit à la résistance R.

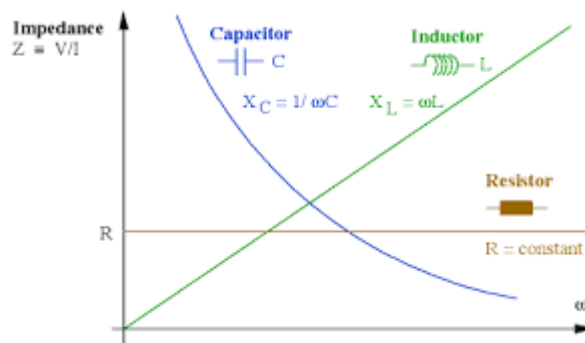


Figure 3. Variation de l'impédance Z_L , Z_C en fonction de la fréquence

On a donc:

$$\frac{dZ^2}{dw_0} = 0 \Rightarrow LCw_0^2 = 1 \Rightarrow w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

w_0 est la pulsation de résonance.

Pour $w=w_0$; $\theta = 0$; l'impédance est minimale, égale à R.

A la résonance, les tensions et courants sont en phase tel que indiqué sur la figure suivante.

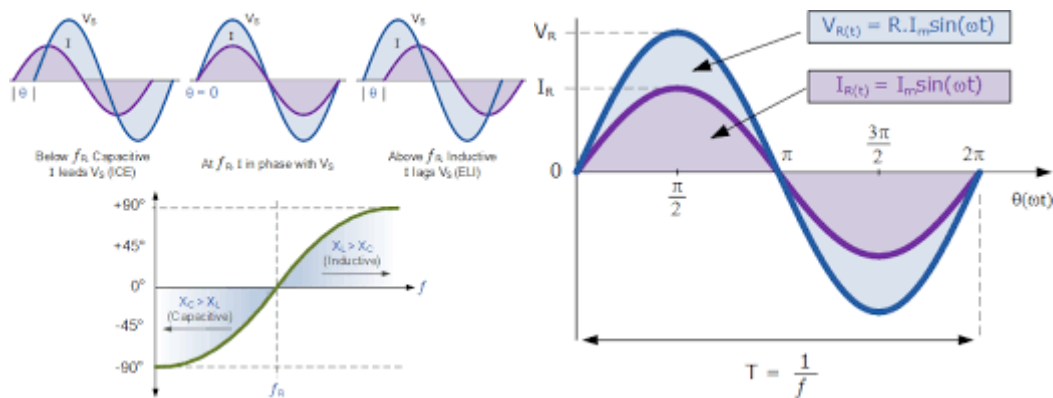


Figure 4. Variation des tensions et courants en fonction de la fréquence

Remarque ; f_0 est la fréquence de résonance,

- Pour $f > f_0$: le dipôle est globalement inductif,
- Pour $f = f_0$: le dipôle est globalement résistif
- Pour $f < f_0$: le dipôle est globalement capacitif.

Quand $w = w_0$

$$\begin{cases} V_L = Lw_0 * \frac{V}{R} = V * \frac{Lw_0}{R} \\ V_C = \frac{1}{Cw_0} * \frac{V}{R} = V * \frac{1}{RCw_0} \end{cases}$$

Ou V est l'amplitude de la tension totale.

Le coefficient de qualité (ou coefficient de qualité série appelé Q ou Q_s) est défini par:

$$Q = \frac{Lw_0}{R} = \frac{1}{RCw_0}$$

On peut écrire donc:

$$\begin{cases} V_L = Q * V \\ V_C = Q * V \end{cases}$$

Le coefficient Q est généralement très grand. A la résonance, les tensions aux bornes de L et C sont alors très grandes devant la tension totale; c'est pourquoi on l'appelle aussi "**coefficient de surtension**".

En valeurs instantanées et suite aux déphasages, on a:

$$\begin{cases} V_L(t) = Q * V * \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) \\ V_C(t) = Q * V * \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

On a donc: $V_L + V_C = 0$.

Lorsque nous avons le potentiel aux bornes de la self identique en module mais opposé en phase au potentiel aux bornes du condensateur, nous pouvons voir que UL et UC vont s'annuler. Comme le courant est le même, on dira que XL est égale à XC. L'impédance d'un tel circuit se ramène donc à la seule valeur de la résistance. Nous parlons alors de **résonance en tension**.

On peut aussi écrire \bar{Z} en fonction de w, w_0 et Q :

$$\bar{Z} = R + j\left(Lw - \frac{1}{Cw}\right) = R + j\left[Lw * \frac{w_0}{w_0} - \frac{1}{Cw} * \frac{w_0}{w_0}\right]$$

$$\begin{aligned} \bar{Z} &= R + jLw_0 \left[\frac{w}{w_0} - \frac{w_0}{w} \right] \\ &= R \left[1 + \left(\frac{jLw_0}{R} \right) \left(\frac{w}{w_0} - \frac{w_0}{w} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\bar{Z} = R \left[1 + jQ \left(\frac{w}{w_0} - \frac{w_0}{w} \right) \right]$$

On écrit donc :

$$|\bar{Z}| = R \sqrt{1 + Q^2 * \left(\frac{w}{w_0} - \frac{w_0}{w} \right)^2} \quad \text{et } \text{tg } \theta = Q \left(\frac{w}{w_0} - \frac{w_0}{w} \right)$$

Pour une excitation en tension :

$$I_M = \frac{V_M}{|\bar{Z}|} \quad \text{et} \quad I_{MR} = \frac{V_M}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{I_M}{I_{MR}} = \frac{R}{|\bar{Z}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 * \left(\frac{w}{w_0} - \frac{w_0}{w} \right)^2}}$$

On peut tracer les fonctions $\frac{I_M}{I_{MR}}$ en fonction de w ; elles sont dites « courbes universelles ».

Quand le coefficient de qualité augmente ($Q_1 > Q_2 > Q_3$), la courbe est plus pointue ; on dit que le circuit est plus sélectif. A -3dB, on a les pulsations w_1 et w_2 .

La bande passante est définie par $\Delta f = f_2 - f_1$

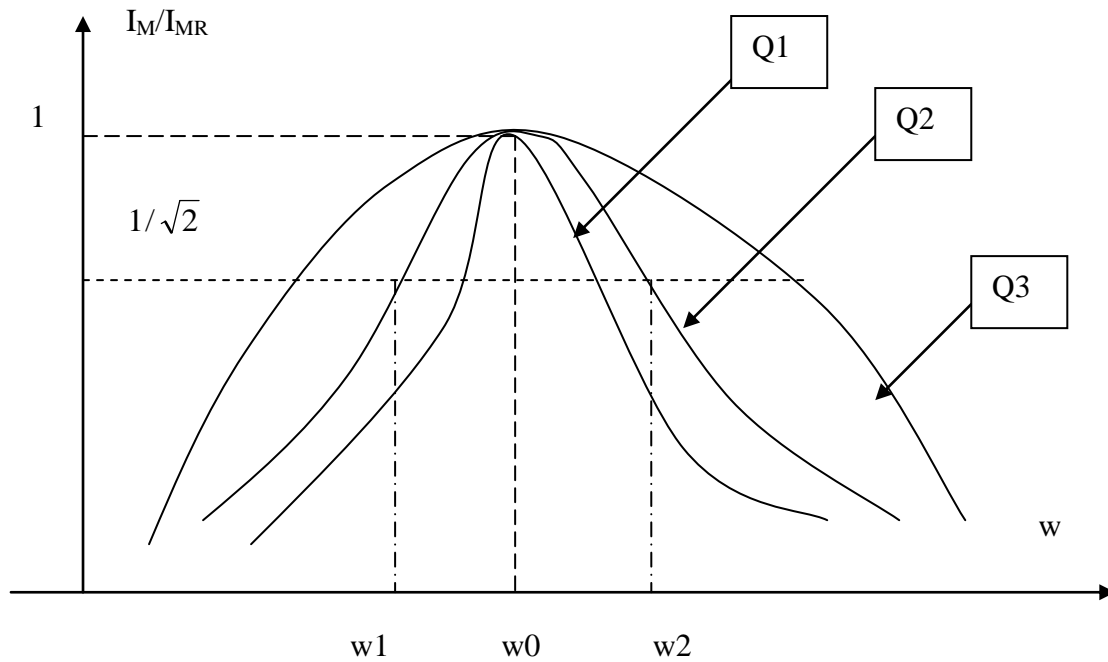


Figure 5. Sélectivité du circuit RLC série

Travail théorique demandé

1. Tracer les variations du module de l'impédance ainsi que l'argument en fonction de la fréquence (pour $100\text{ Hz} < f < 80\text{ Khz}$ avec un pas de 100 hz pour les fréquences inférieures à 1 Khz et 4 Khz pour les fréquences supérieures à 1 Khz) pour les valeurs suivantes:

$$R = 1.2\text{ K}\Omega, L = 680\ \mu\text{H}, C = 22\text{ nF}$$

Que remarquez vous?

2. Pour le circuit RLC étudié, on définit l'impédance par $Z = \frac{U}{I}$.

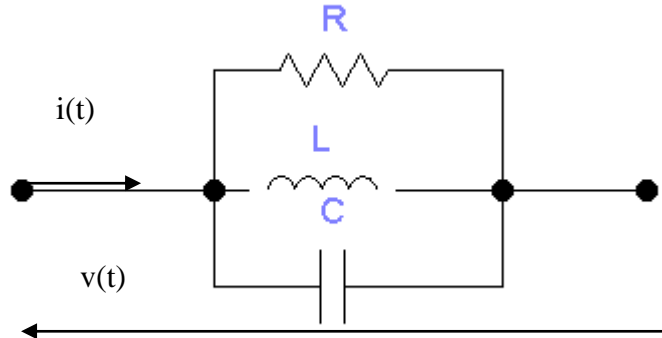
On en déduit la valeur efficace I de l'intensité du courant traversant le circuit série par :

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(Lw - \frac{1}{Cw}\right)^2}}$$

Pour une tension $U=5$ volt, Tracer les variations du courant en fonction de la fréquence. Conclure ?

1.2 Circuit RLC parallèle (circuit bouchon)

Le circuit est ici créé d'une résistance pure, un condensateur pur et d'une bobine pure placés en parallèle.



Soit l'expression de la tension : $v(t) = V_M * \cos wt$

L'équation du courant peut s'écrire : $I = I_R + I_L + I_C$

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} + \left(\frac{1}{L} * \int_0^t v(\tau).d\tau \right) + C * \frac{dv(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \text{Re el} \left[\bar{I} * e^{j\omega t} \right] = \text{Re el} \left[\frac{\bar{V}}{R} * e^{j\omega t} + \frac{\bar{V}}{jL\omega} * e^{j\omega t} + \bar{V} * jC\omega * e^{j\omega t} \right]$$

$$\Rightarrow \bar{I} = \left[\frac{1}{R} + j \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right) \right] * \bar{V}$$

$$\frac{\bar{I}}{\bar{V}} = \bar{Y} = \frac{1}{R} + j \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)$$

$$|\bar{Y}| = \sqrt{\left(\frac{1}{R} \right)^2 + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)^2} \quad \text{et} \quad \text{tg } \psi = \frac{C\omega - \frac{1}{L\omega}}{\frac{1}{R}}$$

La pulsation de résonance ω_0 est obtenue pour une admittance minimale : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Pour laquelle on a : $|\bar{Y}| = \frac{1}{R}$ et $\psi = 0$

L'admittance est minimale revient à dire que l'impédance est maximale, d'où l'appellation « **circuit bouchon** ».

La représentation vectorielle nous donne :

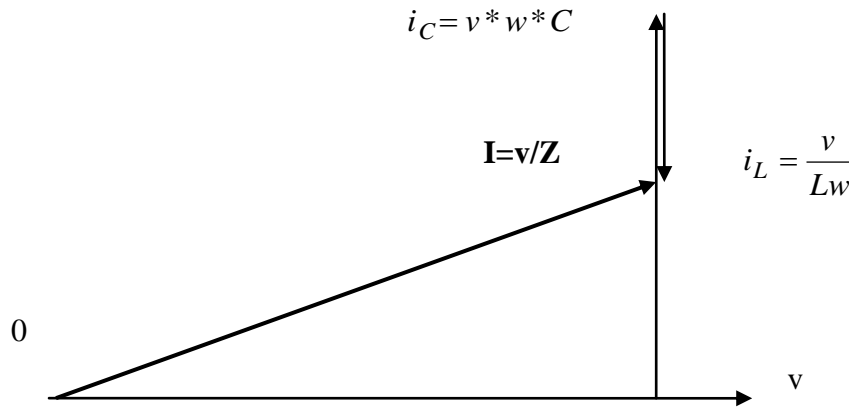


Figure 6. Représentation vectorielle des courants

A la résonance, on a :

$$I_L = \frac{V}{Lw_0} = \frac{V}{R} * \left(\frac{R}{Lw_0} \right) = I * \left(\frac{R}{Lw_0} \right)$$

$$I_C = V * Cw_0 = \left(\frac{V}{R} \right) * RCw_0 = I * RCw_0$$

$$\text{On donne } Q_p = \frac{R}{Lw_0} = RCw_0$$

Q_p est appelé le coefficient de qualité, coefficient de qualité parallèle ou **coefficient de surintensité**.

D'où l'on peut écrire :

$$I_L = Q_p * I$$

$$I_C = Q_p * I$$

Q_p est généralement très grand. A la résonance, les courants qui traversent L et C sont alors très grands devant le courant total d'où l'appellation : **coefficient de surintensité**.

Lorsque le courant dans la self identique en module mais opposé en phase au courant dans le condensateur, nous pouvons voir sur le diagramme vectorielle que I_L et I_C vont s'annuler. X_L est égale à X_C . L'impédance d'un tel circuit se ramène donc à la seule valeur de la résistance. Nous parlons alors de **résonance en courant**.

En valeurs instantanées et suite aux déphasages, on a :

$$i_L(t) = Q_p * I * \cos(w_0 t - \frac{\pi}{2})$$

$$i_C(t) = Q_p * I * \cos(w_0 t + \frac{\pi}{2})$$

On peut écrire aussi \bar{Y} en fonction de w , w_0 et Q_p :

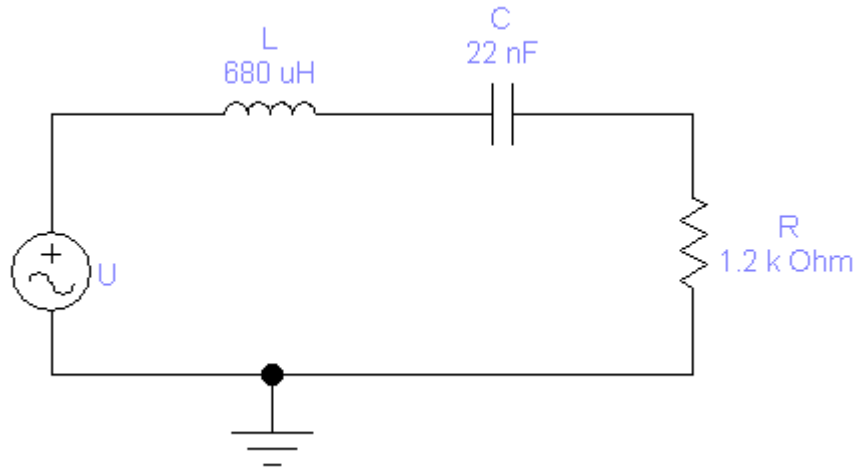
$$|\bar{Y}| = \frac{1}{R} \sqrt{1 + Q_p^2 \left(\frac{w}{w_0} - \frac{w_0}{w} \right)^2} \quad \text{et} \quad \text{tg } \psi = Q_p * \left(\frac{w}{w_0} - \frac{w_0}{w} \right)$$

2. Manipulation

Matériel utilisé :

- Un GBF.
- Un Oscilloscope.
- Une résistance $R = 1.2 K\Omega$
- Un Condensateur $C = 22 nF$
- Une Bobine $L = 680 \mu H$.

1. Réaliser le montage suivant :



A l'aide de l'oscilloscope, régler la tension d'entrée à $E = 5 V_{c\grave{a}c}$.

2. Varier la fréquence jusqu'à ce que la tension V_R soit en phase avec la tension. On remarque bien que : $V_C = V_L$. En déduire la fréquence d'oscillation.

3. En faisant varier la fréquence de 200 Hz à 80 KHz, étudier les variations du courant I et de la phase φ en fonction de la fréquence, sachant que I est mesuré ou relevé à partir de la tension aux bornes de R .

Remplir alors le tableau suivant :

F(Hz)	200Hz								80 KHz
U									
V_R (mv)									
ΔT (ms)									
φ (°)									
I(mA)									

- Tracer les 2 courbes sur deux graphiques placés l'un en dessous de l'autre de $I = f(f)$ et $\varphi = f(f)$.
- En déduire la fréquence de résonance f_0 . Cette valeur correspond elle à celle trouvée théoriquement ?
- Quelle est la valeur de l'intensité I_0 du courant à la résonance ? Noter I_0 sur le graphe ?
- A partir des données expérimentales, déterminer l'impédance Z_0 du circuit à la résonance ?

- Quelle est la valeur du déphasage φ_0 à la résonance ? Justifier ?
- En déduire l'expression de $i(t)$ à la résonance ?
- Quelle est la puissance P_0 consommée dans le circuit à la résonance ?

Surtension à la résonance

- Déterminer l'impédance $Z_{C0} = \frac{1}{C\omega_0}$ du condensateur et la valeur efficace

$U_{C0} = Z_C \cdot I_0$ de la tension aux bornes du condensateur à la résonance ? Comparer avec la tension aux bornes de la bobine ? Remplir ainsi le tableau ci-dessous :

$f_0 = ? \text{ khz}$	U	V_{R0}	V_{C0}	V_{L0}
Module (crête à crête)				
Déphasage sur U				

- Calculez le coefficient $Q = \frac{U_{C0}}{U}$?

Détermination de la bande passante à -3dB ?

La bande passante du circuit RLC série est l'ensemble des fréquences pour lesquelles :

$I_1 \geq \frac{I_0}{\sqrt{2}}$; I_0 est l'intensité du courant à la résonance. Calculez $I_1 \geq \frac{I_0}{\sqrt{2}}$?

- Déterminer graphiquement les 2 fréquences f_1 et f_2 correspondant à cette valeur de I_1 ?
- En déduire la largeur de la bande passante : $\beta = f_2 - f_1$?
- Quel est le facteur de qualité Q de ce circuit : $Q = \frac{f_0}{\beta}$? Comparer avec la valeur trouvée auparavant ?

Détermination de la puissance P_1 à la fréquence f_1

- Calculez la valeur de φ_1 pour la fréquence f_1 ? En déduire l'expression de $i(t)$ pour la fréquence f_1 ?
- Quelle est la puissance P_1 consommée dans le circuit pour la fréquence f_1 ?
- Vérifier que $10 * \log \frac{P_1}{P_0} = -3dB$?
- Comparez les impédances de la bobine et du condensateur à la fréquence f_1 , en déduire si le circuit est inductif ou capacitif à cette fréquence ?

Acuité de la résonance

On fait varier la fréquence f du GBF et on relève la valeur efficace de l'intensité I (en mA) du courant circulant dans le circuit pour les deux valeurs de la résistance $R = 1.2 \text{ K}\Omega$ et $R' = 510 \Omega$.

- En déduire la nouvelle valeur de la fréquence de résonance ? Conclure ?
- Déterminer la bande passante β' si $R' = 0.51 \text{ k}\Omega$
- Quel est le nouveau facteur de qualité Q du circuit ? Discuter la sélectivité du circuit ?

Conclusion générale.